

\$SPAD/input schaum30.input

Timothy Daly

June 15, 2008

Contents

1	[1]:14.604	$\int \tanh ax \, dx$	3
2	[1]:14.605	$\int \tanh^2 ax \, dx$	5
3	[1]:14.606	$\int \tanh^3 ax \, dx$	7
4	[1]:14.607	$\int \tanh^n ax \operatorname{sech}^2 ax \, dx$	10
5	[1]:14.608	$\int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax} \, dx$	11
6	[1]:14.609	$\int \frac{dx}{\tanh ax} \, dx$	13
7	[1]:14.610	$\int x \tanh ax \, dx$	14
8	[1]:14.611	$\int x \tanh^2 ax \, dx$	15
9	[1]:14.612	$\int \frac{\tanh ax}{x} \, dx$	19
10	[1]:14.613	$\int \frac{dx}{p + q \tanh ax} \, dx$	20
11	[1]:14.614	$\int \tanh^n ax \, dx$	21

1 [1]:14.604 $\int \tanh ax \, dx$

$$\int \tanh ax = \frac{1}{a} \ln \cosh ax$$

```

(*)≡
)spool schaum30.output
)set message test on
)set message auto off
)clear all

--S 1
aa:=integrate(tanh(a*x),x)
--R
--R
--R          2cosh(a x)
--R      log(- -----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 2
bb:=1/a*log(cosh(a*x))
--R
--R      log(cosh(a x))
--R (2) -----
--R          a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 3
cc:=aa-bb
--R
--R          2cosh(a x)
--R      - log(cosh(a x)) + log(- -----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (3) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 4
dd:=expandLog cc
--R

```

```

--R      - log(sinh(a x) - cosh(a x)) + log(- 2) - a x
--R (4) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 5      14:604 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd

```

```

--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R (5) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

2 [1]:14.605 $\int \tanh^2 ax \, dx$

$$\int \tanh^2 ax = x - \frac{\tanh ax}{a}$$

```
(*)+≡
)clear all
```

```
--S 6
```

```
aa:=integrate(tanh(a*x)^2,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R      - sinh(a x) + (a x + 1)cosh(a x)
```

```
--R (1) -----
```

```
--R      a cosh(a x)
```

```
--R
```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--E
```

```
--S 7
```

```
bb:=x-tanh(a*x)/a
```

```
--R
```

```
--R      - tanh(a x) + a x
```

```
--R (2) -----
```

```
--R      a
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 8
```

```
cc:=aa-bb
```

```
--R
```

```
--R      cosh(a x)tanh(a x) - sinh(a x) + cosh(a x)
```

```
--R (3) -----
```

```
--R      a cosh(a x)
```

```
--R
```

```
Type: Expression Integer
```

```
--E
```

```
--S 9
```

```
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
```

```
--R
```

```
--R      sinh(x)
```

```
--R (4) tanh(x) == -----
```

```
--R      cosh(x)
```

```
--R
```

```
Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
```

```
--E
```

```
--S 10      14:605 Schaums and Axiom differ by a constant
```

dd:=tanhrule cc

--R

--R 1

--R (5) -

--R a

--R

--E

Type: Expression Integer

3 [1]:14.606 $\int \tanh^3 ax \, dx$

$$\int \tanh^3 ax = \frac{1}{a} \ln \cosh ax - \frac{\tanh^2 ax}{2a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 11
aa:=integrate(tanh(a*x)^3,x)
--R
--R
--R (1)
--R      4      3      2      2
--R      sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + (6cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4cosh(a x) + 4cosh(a x))sinh(a x) + cosh(a x) + 2cosh(a x) + 1
--R      *
--R      2cosh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      4      3
--R      - a x sinh(a x) - 4a x cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (- 6a x cosh(a x) - 2a x + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4
--R      (- 4a x cosh(a x) + (- 4a x + 4)cosh(a x))sinh(a x) - a x cosh(a x)
--R      +
--R      2
--R      (- 2a x + 2)cosh(a x) - a x
--R      /
--R      4      3      2      2
--R      a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + (6a cosh(a x) + 2a)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4a cosh(a x) + 4a cosh(a x))sinh(a x) + a cosh(a x) + 2a cosh(a x) + a
--R
--R      Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

--S 12
bb:=1/a*log(cosh(a*x))-tanh(a*x)^2/(2*a)
--R

```

```

--R
--R      2
--R      2log(cosh(a x)) - tanh(a x)
--R (2) -----
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

--S 13 14:606 Axiom cannot simplify this expression

cc:=aa-bb

```

--R
--R (3)
--R      4      3      2      2
--R      - 2sinh(a x) - 8cosh(a x)sinh(a x) + (- 12cosh(a x) - 4)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (- 8cosh(a x) - 8cosh(a x))sinh(a x) - 2cosh(a x) - 4cosh(a x) - 2
--R      *
--R      log(cosh(a x))
--R      +
--R      4      3      2      2
--R      2sinh(a x) + 8cosh(a x)sinh(a x) + (12cosh(a x) + 4)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (8cosh(a x) + 8cosh(a x))sinh(a x) + 2cosh(a x) + 4cosh(a x) + 2
--R      *
--R      2cosh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      4      3      2      2
--R      sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + (6cosh(a x) + 2)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4      2
--R      (4cosh(a x) + 4cosh(a x))sinh(a x) + cosh(a x) + 2cosh(a x) + 1
--R      *
--R      2
--R      tanh(a x)
--R      +
--R      4      3
--R      - 2a x sinh(a x) - 8a x cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (- 12a x cosh(a x) - 4a x + 4)sinh(a x)
--R      +
--R      3      4
--R      (- 8a x cosh(a x) + (- 8a x + 8)cosh(a x))sinh(a x) - 2a x cosh(a x)

```



```

--R      +
--R      2
--R      (- 4a x + 4)cosh(a x) - 2a x
--R /
--R      4      3      2      2
--R      2a sinh(a x) + 8a cosh(a x)sinh(a x) + (12a cosh(a x) + 4a)sinh(a x)
--R +
--R      3      4      2
--R      (8a cosh(a x) + 8a cosh(a x))sinh(a x) + 2a cosh(a x) + 4a cosh(a x)
--R +
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

4 [1]:14.607 $\int \tanh^n ax \operatorname{sech}^2 ax \, dx$

$$\int \tanh^n ax \operatorname{sech}^2 ax = \frac{\tanh^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

```

(*)+≡
)clear all

--S 14
aa:=integrate(tanh(a*x)^n*sech(a*x)^2,x)
--R
--R
--R              sinh(a x)                      sinh(a x)
--R      sinh(a x)sinh(n log(-----)) + sinh(a x)cosh(n log(-----))
--R              cosh(a x)                      cosh(a x)
--R (1) -----
--R              (a n + a)cosh(a x)
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 15
bb:=tanh(a*x)^(n+1)/((n+1)*a)
--R
--R              n + 1
--R      tanh(a x)
--R (2) -----
--R              a n + a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 16      14:607 Axiom cannot simplify this expression
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R              sinh(a x)                      sinh(a x)
--R      sinh(a x)sinh(n log(-----)) + sinh(a x)cosh(n log(-----))
--R              cosh(a x)                      cosh(a x)
--R      +
--R              n + 1
--R      - cosh(a x)tanh(a x)
--R /
--R      (a n + a)cosh(a x)
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

5 [1]:14.608 $\int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax} dx$

$$\int \frac{\operatorname{sech}^2 ax}{\tanh ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh ax$$

```

(*)+=
)clear all

--S 17
aa:=integrate(sech(a*x)^2/tanh(a*x),x)
--R
--R
--R              2cosh(a x)              2sinh(a x)
--R      - log(- -----) + log(- -----)
--R              sinh(a x) - cosh(a x)    sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                                         a
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 18
bb:=1/a*log(tanh(a*x))
--R
--R      log(tanh(a x))
--R (2) -----
--R              a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

--S 19
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
--R              2cosh(a x)
--R      - log(tanh(a x)) - log(- -----)
--R              sinh(a x) - cosh(a x)
--R
--R      +
--R              2sinh(a x)
--R      log(- -----)
--R              sinh(a x) - cosh(a x)
--R
--R      /
--R      a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 20
tanhrule:=rule(tanh(x) == sinh(x)/cosh(x))
--R
--R          sinh(x)
--R (4)  tanh(x) == -----
--R          cosh(x)
--R                                     Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 21
dd:=tanhrule cc
--R
--R (5)
--R          sinh(a x)          2cosh(a x)
--R - log(-----) - log(-----)
--R          cosh(a x)          sinh(a x) - cosh(a x)
--R +
--R          2sinh(a x)
--R log(-----)
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R /
--R a
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 22      14:608 Schaums and Axiom agree
ee:=expandLog dd
--R
--R (6)  0
--R
--R                                     Type: Expression Integer
--E

```

6 [1]:14.609 $\int \frac{dx}{\tanh ax} dx$
 $\int \frac{1}{\tanh ax} = \frac{1}{a} \ln \sinh ax$

```

(*)+=
)clear all

--S 23
aa:=integrate(1/tanh(a*x),x)
--R
--R
--R          2sinh(a x)
--R    log(- -----) - a x
--R          sinh(a x) - cosh(a x)
--R (1) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 24
bb:=1/a*log(sinh(a*x))
--R
--R    log(sinh(a x))
--R (2) -----
--R                      a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 25
cc:=aa-bb
--R
--R          2sinh(a x)
--R    - log(sinh(a x)) + log(- -----) - a x
--R                               sinh(a x) - cosh(a x)
--R (3) -----
--R                                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 26
dd:=expandLog cc
--R
--R    - log(sinh(a x) - cosh(a x)) + log(- 2) - a x
--R (4) -----

```

```

--R
--R          a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 27      14:609 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd

```

```

--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R (5) -----
--R             a
--R
--R                                         Type: Expression Integer
--E

```

7 [1]:14.610 $\int x \tanh ax \, dx$

$$\int x \tanh ax = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \dots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right\}$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```

--S 28      14:610 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(x*tanh(a*x),x)

```

```

--R
--R
--R          x
--R        ++
--R (1)  |  %0 tanh(%0 a)d%0
--R        ++
--R
--R                                         Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

8 [1]:14.611 $\int x \tanh^2 ax \, dx$

$$\int x \tanh^2 ax = \frac{x^2}{2} - \frac{x \tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cosh ax$$

```

(*)+=
)clear all

--S 29
aa:=integrate(x*tanh(a*x)^2,x)
--R
--R
--R (1)
--R
--R      2
--R      (2sinh(a x) + 4cosh(a x)sinh(a x) + 2cosh(a x) + 2)
--R      *
--R      2cosh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      2 2      2      2 2
--R      (a x - 4a x)sinh(a x) + (2a x - 8a x)cosh(a x)sinh(a x)
--R      +
--R      2 2      2      2 2
--R      (a x - 4a x)cosh(a x) + a x
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      2a sinh(a x) + 4a cosh(a x)sinh(a x) + 2a cosh(a x) + 2a
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

--S 30
bb:=x^2/2-(x*tanh(a*x))/a+1/a^2*log(cosh(a*x))
--R
--R
--R      2 2
--R      2log(cosh(a x)) - 2a x tanh(a x) + a x
--R (2) -----
--R
--R      2
--R      2a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

--S 31
cc:=aa-bb
--R
--R (3)
```

```

--R      2      2
--R      (- sinh(a x)  - 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(a x)  - 1)log(cosh(a x))
--R      +
--R      2      2
--R      (sinh(a x)  + 2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(a x)  + 1)
--R      *
--R      2cosh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      (a x sinh(a x)  + 2a x cosh(a x)sinh(a x) + a x cosh(a x)  + a x)
--R      *
--R      tanh(a x)
--R      +
--R      2      2
--R      - 2a x sinh(a x)  - 4a x cosh(a x)sinh(a x) - 2a x cosh(a x)
--R      /
--R      2      2      2      2      2      2
--R      a sinh(a x)  + 2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(a x)  + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 32
sinhsqrrule:=rule(sinh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)-1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) - 1
--R      (4)  sinh(x)  == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 33
dd:=sinhsqrrule cc
--R
--R      (5)
--R      2
--R      (- 4cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) - 2cosh(a x)  - 1)log(cosh(a x))
--R      +
--R      2
--R      (4cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) + 2cosh(a x)  + 1)
--R      *
--R      2cosh(a x)
--R      log(- -----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +

```



```

--R
--R      (4a x cosh(a x)sinh(a x) + a x cosh(2a x) + 2a x cosh(a x)2 + a x)
--R      *
--R      tanh(a x)
--R      +
--R      - 8a x cosh(a x)sinh(a x) - 2a x cosh(2a x) - 4a x cosh(a x)2 + 2a x
--R      /
--R      2      2      2      2      2
--R      4a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + 2a cosh(a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 34
coshsqrrule:=rule(cosh(x)^2 == 1/2*cosh(2*x)+1/2)
--R
--R      2      cosh(2x) + 1
--R      (6) cosh(x) == -----
--R      2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 35
ee:=coshsqrrule dd
--R
--R      (7)
--R      (- 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) - 1)log(cosh(a x))
--R      +
--R      (2cosh(a x)sinh(a x) + cosh(2a x) + 1)log(- 2cosh(a x)-----)
--R      sinh(a x) - cosh(a x)
--R      +
--R      (2a x cosh(a x)sinh(a x) + a x cosh(2a x) + a x)tanh(a x)
--R      +
--R      - 4a x cosh(a x)sinh(a x) - 2a x cosh(2a x)
--R      /
--R      2      2      2
--R      2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 36
ff:=expandLog ee
--R
--R      (8)
--R      (- 2cosh(a x)sinh(a x) - cosh(2a x) - 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))

```

```

--R      +
--R      (2a x cosh(a x)sinh(a x) + a x cosh(2a x) + a x)tanh(a x)
--R      +
--R      (2log(- 2) - 4a x)cosh(a x)sinh(a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x)
--R      +
--R      log(- 2)
--R      /
--R      2          2          2
--R      2a cosh(a x)sinh(a x) + a cosh(2a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 37
sinhcoshrule:=rule(sinh(x)*cosh(y) == 1/2*(sinh(x+y)+sinh(x-y)))
--R
--I
--I      (9)  %N cosh(y)sinh(x) == -----
--R                                     %N sinh(y + x) - %N sinh(y - x)
--R                                     2
--R
--R                                          Type: RewriteRule(Integer,Integer,Expression Integer)
--E

```

```

--S 38
gg:=sinhcoshrule ff
--R
--R      (10)
--R      (- sinh(2a x) - cosh(2a x) - 1)log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      (a x sinh(2a x) + a x cosh(2a x) + a x)tanh(a x)
--R      +
--R      (log(- 2) - 2a x)sinh(2a x) + (log(- 2) - 2a x)cosh(2a x) + log(- 2)
--R      /
--R      2          2          2
--R      a sinh(2a x) + a cosh(2a x) + a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 39      14:611 Schaums and Axiom differ by a constant
hh:=complexNormalize gg
--R
--R      - log(- 1) + log(- 2)
--R      (11) -----
--R                  2
--R                  a
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

9 [1]:14.612 $\int \frac{\tanh ax}{x} dx$

$$\int \frac{\tanh ax}{x} = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \dots - \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots$$

```

(*)+≡
)clear all

```

```
--S 40      14:612 Axiom cannot compute this integral
```

```
aa:=integrate(tanh(a*x)/x,x)
```

```
--R
```

```
--R
```

```
--R
```

```

--I      x
--I      ++  tanh(%0 a)
--I (1)  | ----- d%0
--I      ++      %0

```

```
Type: Union(Expression Integer,...)
```

```
--R
```

```
--E
```

10 [1]:14.613 $\int \frac{dx}{p + q \tanh ax} dx$

$$\int \frac{1}{p + q \tanh ax} = \frac{px}{p^2 - q^2} - \frac{q}{a(p^2 - q^2)} \ln(q \sinh ax + p \cosh ax)$$

(*)+≡
)clear all

--S 41

aa:=integrate(1/(p+q*tanh(a*x)),x)

--R

--R

--R - 2q sinh(a x) - 2p cosh(a x)

--R q log(-----) + (- a q - a p)x

--R sinh(a x) - cosh(a x)

--R (1) -----

--R 2 2
a q - a p

--R

--R

Type: Union(Expression Integer,...)

--E

--S 42

bb:=(p*x)/(p^2-q^2)-q/(a*(p^2-q^2))*log(q*sinh(a*x)+p*cosh(a*x))

--R

--R q log(q sinh(a x) + p cosh(a x)) - a p x

--R (2) -----

--R 2 2
a q - a p

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

--S 43

cc:=aa-bb

--R

--R (3)

--R - q log(q sinh(a x) + p cosh(a x)) + q log(-----)

--R - 2q sinh(a x) - 2p cosh(a x)

--R sinh(a x) - cosh(a x)

--R +

--R - a q x

--R /

--R 2 2
a q - a p

--R

--R

Type: Expression Integer

--E

```

--S 44
dd:=expandLog cc
--R
--R (4)
--R      - q log(q sinh(a x) + p cosh(a x)) - q log(sinh(a x) - cosh(a x))
--R      +
--R      q log(- q sinh(a x) - p cosh(a x)) + q log(2) - a q x
--R /
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

```

--S 45      14:613 Schaums and Axiom differ by a constant
ee:=complexNormalize dd
--R
--R      q log(2) - 2q log(- 1)
--R (5) -----
--R      2      2
--R      a q  - a p
--R
--R                                          Type: Expression Integer
--E

```

11 [1]:14.614 $\int \tanh^n ax \, dx$

$$\int \tanh^n ax = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \tanh^{n-2} ax$$

```

(*)+=
)clear all

```

```

--S 46      14:614 Axiom cannot compute this integral
aa:=integrate(tanh(a*x)^n,x)
--R
--R
--R      x
--R      ++      n
--R (1) | tanh(%0 a) d%0
--R      ++
--R
--R                                          Type: Union(Expression Integer,...)
--E

```

```

)spool
)lisp (bye)

```

References

- [1] Spiegel, Murray R. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*
Schaum's Outline Series McGraw-Hill 1968 pp89-90